

Title	或ル積分方程式ニ就テ
Author(s)	佐藤, 常三
Citation	全国紙上数学談話会. 39 p.3-p.6
Issue Date	1935-04-30
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74046
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

124. 或ル積分方程式ニ就テ

佐藤 常三 (京大)

コレハ過日、日本數物學會年會講演ヲ渡辺義勝先生ガ——
尤モ最一般ナル場合ノ証明ハ第一種フレドム積分方程式ノ一種
ノ形トナリ

$$(A) \int_{x_1}^{x_2} \lambda(x, t) \varphi(t, u) dt = \varphi(x, u)$$

$$\text{茲ニ} \quad 0 \leq a \leq u \leq x_0 < x_1 < x_2 < x < +\infty$$

$$\text{但シ} \quad \varphi(x, u) = \frac{k}{x^k} (x-u)^{k-1}$$

$$\text{又ハ} \quad \frac{1}{x \Gamma(k)} \left(\log \frac{x}{n} \right)^{k-1} \quad (k > 0).$$

上式カラ未知函數 $\lambda(x, t)$ ヲ求メネバナラヌガ未解決デア
ル云々 ———— ト述べラレテ誰カ鍵ヲ與ヘテ呉レト仰言ラレ
タガ、茲デ私ハ先生ニ鍵ヲオ渡シスルノチマナクテ、誰カニ
私ノ下手ナ鍵ノ作リ方ニ對シテ御高評ガ願ヒタイ。

扱テ (A) ナル函数方程式ヲ在來ノ Fredholm 型トミルタ
メニハ點 (x, t) ハ square-domain $x_1 \leq x \leq x_2$,
 $x_1 \leq t \leq x_2$ ニナケレバナラナイノダガ、但シ書キヲミルト
サウデナイ。

次 = u 7 *parameter* トミテ $\varphi(x, u)$ 7 u ノーツノ
 値 = 對スル 固有函数 トミレバ、其レガ屬スベキ核ハ $\lambda(x, t)$
 デアルカラ、當然 $\lambda(x, t)$ ハ亦 *parameter* u ノ函数
 デナケレバナラナイ、更ニ $\varphi(x, u)$ ノ形ヲミルト
 $0 \leq u \leq x_0 < x_1 < x_2 < x$ デアルカラ u ニツイテハ 常ニ
Taylor's series = 展開可能ト云フコトニナツテクルカラ
 (A) ナル等式 關係ガ成立スルコトハ、怪シク思ハレテクル。

今函数 $K(x, t)$ ガ $0 \leq u \leq t \leq x < +\infty$ ナル *triangular region* デ *define* セラレタ 連続函数 トシテ

$$(1) \int_u^x K(x, t)(t-u)^\beta dt = (x-u)^\beta \quad (\beta \neq 0, \beta > -1)$$

ナル如キ 積分方程式 (*Volterra* 型) 7 考ヘル、コノ両辺
 = $(u-s)^\alpha du$ 7 カケテ スカラ x マデ 積分スルト

$$\begin{aligned}
 \int_s^x (u-s)^\alpha du \int_u^x K(x, t)(t-u)^\beta dt \\
 = \int_s^x (x-u)^\beta (u-s)^\alpha du.
 \end{aligned}$$

double integral = 對スル *Dirichlet's transformation* 7 利用スルト

$$\int_s^t (t-u)^\beta (u-s)^\alpha du = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (t-s)^{\alpha+\beta+1}$$

$$(u = s + (t-s)\theta \quad \text{ヨリ } u \rightarrow \theta \text{ デ行フ})$$

トナルカラ 結局

$$\int_s^x K(x, t)(t-s)^{\beta+\alpha+1} dt = (x-s)^{\beta+\alpha+1}$$

∴ コノ特 = $\alpha \neq (\alpha > -1)$ シテ

$$\beta + \alpha + 1 = n \quad (n: \text{non-negative integer})$$

ナル如ク適當 = エラムナラバ

$$\int_s^x K(x, t)(t-s)^n dt = (x-s)^n.$$

コノ兩辺ヲ $s = \text{ツイテ}$ $(n+1)$ -times-partial differentiation ヲ行ハバ

$$K(x, s) = 0$$

扱テ次 = $K(x, t)$ ヲ次ノ如ク = define シテミル。

$$\begin{cases} K(x, t) = \mu(x, t) & \text{for } x_1 \leq t \leq x_2 < x \\ K(x, t) = 0 & \text{for } 0 \leq t < x_1, \\ K(x, t) = 0 & \text{for } x_2 < t \end{cases}$$

然ルトキハ上ノ積分方程式 (1) ハ

$$\int_u^x = \int_u^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \int_{x_2}^x = \int_{x_1}^{x_2}$$

デアルカラ

$$(2) \quad \int_{x_1}^{x_2} \mu(x, t)(t-u)^{\beta} dt = (x-u)^{\beta} \quad \text{for any } x < u$$

トナル。

ソコデ冒頭ノ問題 (A) = 立ち戻ツテミルト丁度 (2) = 於

テ

$$\mu(x, t) \equiv \frac{x^k}{t^k} \lambda(x, t) \quad (0 < x_1 \leq t \leq x_2)$$

= 相當スル。但シ $\beta = k-1$; $\beta > -1$ デアルカラ $k > 0$.

残ルトコロハ $\beta = 0 \quad \therefore e. k = 1$. (trivial)

$$\varphi(x, u) = \frac{1}{x \Gamma(k)} \left(\log \frac{x}{u} \right)^{k-1} \quad \text{トシテモ同様結論サレル.}$$

ソレハ $\log x$ ハ單調増加デアルカラ、ヤハリ上述ノ処作
 が可能ナル(全. 紙. 數. 談. 會第 10 号 32、Abel's
integral equation; 京大理學部紀要, Vol. 53, 1935,
 同題; (x) ノ代リ = $\log x$ ヲオク) 何レ=シテモ $k=1$
 ナルトキ以外ハ等式關係が成立セナイコト=ナルト思フ。